ANALIZA DEFORMACIJE

VEZA IZMEĐU STANJA NAPONA I DEFORMACIJE

Pod uticajem spoljašnjih sila tijela (konstrukcije) se pomjeraju u prostoru i istovremeno mijenjaju svoj oblik i dimenzije. Pomjeranje bilo koje tačke konstrukcije može se rastaviti na dio koji je rezultat pomjeranja konstrukcije kao cjeline i dio koji je rezultat promjene oblika i dimenzija. Pomjeranja koja su rezultat promjene oblika i dimenzija tijela (konstrukcije) nazivamo **deformacijom tijela.**

Ovdje ćemo stalno praviti poređenje sa stanjem napona u tački opterećenog tijela koje smo savladali prošle nedjelje. Naravno ova dva stanja (napona i deformacije) su međusobno povezani i na kraju ćemo prikazati njihovu vezu.

1. POJAM DEFORMACIJE, KOMPONENTE DEFORMACIJE, PROSTORNO STANJE DEFORMACIJE, TENZOR DEFORMACIJE

Komponente deformacije:

Kako je prethodno rečeno, deformacija treba da opiše određeno pomjeranje. Međutim mi ćemo deformaciju u tački tijela da predstavimo preko **komponenti deformacije**, a to su **dilatacija (ε_n)** i **klizanje (γ_{nl})** ili ugao klizanja.

Prema definiciji komponente deformacije predstavljaju:

$\varepsilon_n = \lim_{l \to \infty} \Delta l / l$ *- promena jedinične dužine nekog pravca kroz datu tačku.*

$\gamma_{nl} = \pi/2 - \alpha$ *- promena prvobitnog pravog ugla.*

Konvencija o znaku komponenti deformacije:

Očigledno je da je dilatacija bezdimenzionalna veličina. Dilatacija je pozitivna ako se posmatrana dužina nakon deformacije povećava a u suprotnom je negativna.

Pošto klizanje definiše promjenu ugla ono se izražava u radijanima. Prema konvenciji klizanje je pozitivno, ako se prvobitni pravi ugao nakon deformacije smanjuje, a u protivnom je negativan.

Stanje deformacije u tački:

Kao što smo definisali stanje napona u tački, analogno ćemo definisati i stanje deformacije. Dakle stanje deformacije je različito u različitim tačkama opterećenog tijela, ali isto tako, u istoj tački imamo različite komponente deformacije u zavisnosti od posmatranog pravca odnosno pravaca. Cilj nam je da poznajemo komponente deformacije za proizvoljni pravac odnosno da sračunamo ekstremne vrijednosti, kao što smo radili kada smo analizirali napone.

Dakle, analogno stanju napona, ako poznajemo vektore ukupnog napona za 3 međusobno upravna pravca (npr. Dekartov koordinatni sistem) onda možemo sračunati deformaciju za proizvoljni pravac. Ako vektore ukupnog napona, tačnije projekcije tih vektora koje nijesu ništa drugo nego komponente deformacije prikažemo u matričnom obliku, dobijamo takozvani **tenzor prostornog stanja deformacije**.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Dakle, ako poznajemo tenzor deformacije poznajemo stanje deformacije u tački. Tenzor deformacije čini 9 komponenti deformacije 3 dilatacije i 6 klizanja. Međutim određene komponente klizanja su međusobno zavisne ($\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$; $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$; $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$). Dakle, tenzor deformacije je matrica simetrična u odnosu na dijagonalu i čini je 6 međusobno nezavisnih komponenti.

Zbog komplikovanosti, nadalje ćemo se baviti ravnim stanjem deformacije.

2. RAVNO STANJE DEFORMACIJE – KOMPONENTE DEFORMACIJE U PROIZVOLJNOJ KOSOJ RAVNI, GLAVNE DILATACIJE, MOHROV KRUG DEFORMACIJE

U slučaju da su u okolini neke tačke pomjeranja u pravcu jedne koordinatne ose jednaka nuli, a pomjeranja u pravcu druge dvije koordinatne ose ne zavise od te koordinate, onda u toj tački imamo ravno stanje deformacije. U ovom slučaju su sve komponente tenzora deformacije jednake nuli u pravcu ose za koje je pomjeranje jednako nuli.

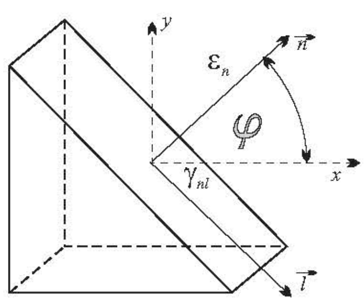
Tenzor deformacije za ravno stanje deformacije piše se u obliku

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Komponente deformacije u proizvoljnom pravcu:

Analogno stanju napona, dilataciju za pravac **n** čija normala zaklapa ugao **φ** sa osom **x** (kako je prikazano na narednoj slici) i klizanje između pravaca **n** i **l** možemo sračunati kako slijedi:

Ravno stanje deformacije



$$\varepsilon_n = 0.5(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 0.5(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos 2\varphi + 0.5\gamma_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{nl} = 0.5(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\varphi - 0.5\gamma_{xy}\cos 2\varphi$$

Glavni naponi, glavne ravni (pravci):

Iz prethodnih izraza se vidi da se komponente deformacije mijenjaju kako se mijenja ugao **φ.** Nas interesuje ekstremne vrijednosti (maksimum i minimum) dilatacije i pravci u kojima se javljaju. Može se pokazati da se te vrijednostiu računaju kako slijedi:

Glavne dilatacije i pravci glavnih dilatacija

$$\varepsilon_1 = 0.5\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 0.5\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}{}^2} = \varepsilon_{max}$$

$$\varepsilon_1 = 0.5\,(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - 0.5\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}{}^2} = \varepsilon_{min} \qquad \gamma_{12} = 0$$

***Pravci glavnih dilatacija** definisani su uglom α*

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad \begin{cases} \mathrm{sign}\,[\sin 2\alpha] = \mathrm{sign}\,[\gamma_{xy}] \\ \mathrm{sign}\,[\cos 2\alpha] = \mathrm{sign}\,[\varepsilon_x - \varepsilon_y] \end{cases} \qquad \alpha = \begin{cases} 0.5\mathrm{arctg}\,(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}) & \text{za } (\varepsilon_x - \varepsilon_y) > 0 \\ 0.5\mathrm{arctg}\,(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}) + 90^\circ & \text{za } (\varepsilon_x - \varepsilon_y) < 0 \end{cases}$$

Dilatacije $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ i $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ **predstavljaju ekstremne vrijednosti dilatacija i nazivaju se glavne dilatacije** u datoj tački, a pravci u kojima se događaju se nazivaju **glavne ravni**.

Klizanje između glavnih pravaca je nula – $\boldsymbol{\gamma_{12}}$=0.

Maksimalno klizanje (γ_{max}) i odgovarajuća dilatacija (ε_{odg}):

1/2$\boldsymbol{\gamma_{max}}$= 1/2 ($\boldsymbol{\varepsilon_1}$ - $\boldsymbol{\varepsilon_2}$)

$\boldsymbol{\varepsilon_{odg}}$ = 1/2 ($\boldsymbol{\varepsilon_1}$ + $\boldsymbol{\varepsilon_2}$)

Pravci između kojih se događa maksimalno klizanje su zarotirani za 45^0 u odnosi na pravce **1** i **2**.

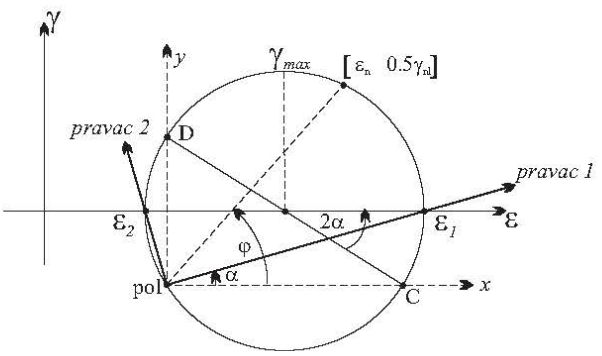
Mohr-ov krug deformacije:

Mohr-ov krug deformacije je geometrijsko mjesto tačaka čije koordinate (ε_n, $1/2\gamma_{nl}$) definišu komponente deformacije za sve moguće pravce **n** kroz posmatranu tačku.

Mohr-ov krug deformacije
(slučaj ravnog stanja deformacije)

tačke potrebne za konstrukciju
Mohr-ovog kruga deformacije

$$[\mathrm{C}] = [\ \varepsilon_x \quad -0.5\gamma_{xy}\ ] \qquad [\mathrm{D}] = [\ \varepsilon_y \quad 0.5\gamma_{xy}\ ]$$



3. VEZA IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJA ZA IDEALNO ELASTIČNO TIJELO

U slučaju idealno elastičnog homogenog i izotropnog tijela važi generalisani Hook-ov zakon koji predtavlja vezu između komponenti stanja napona i stanja deformacije. Dilatacije (ε) su direktno proporcionalne normalnim naponima ($\boldsymbol{\sigma}$), dok su klizanja (γ) direktno proporcionalna smičućim naponima ($\boldsymbol{\tau}$), u svemu prema formulama niže.

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E \qquad (+\alpha\Delta t)$$

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]/E \qquad (+\alpha\Delta t)$$

$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E \qquad (+\alpha\Delta t)$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{zx}/G$$

U prvoj grupi formula je potrebno uračunati sabirak u zagradama samo ako na tijelo djeluje promjena temperature ($\Delta \boldsymbol{t}$).

Pored komponenti napona i deformacija u formulama figurišu takozvane elastične konstate materijala, i to:

E – modul elastičnosti;

ν - Poisson-ov koeficijent – odnos poprečne i podužne dilatacije;

G = ***E*** / 2 (1+***ν***) - modul klizanja;

α – koeficijen termičke dilatacije.

U narednoj tabeli su date vrijednosti elastičnih konstanti za neke građevinske materijale.

Vrsta materijala	Modul elastič. E(*GPa*)	Modul klizanja G(*GPa*)	Poasonov koeficijent υ	Koef. termič. dilatacije $\alpha_t(10^{-5}/°C)$
Aluminijum	70	27	0.32	2.34
Bakar	110	47	0.33	1.65
Čelik	210	81	0.30	1.17
Liveno gvožđe	100	38	0.25	1.04
Beton	20-40		0.15	1.08

LITERATURA

1. R. Pejović, Građevinska mehanika (II dio) – OTPORNOST, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2014.
2. R. Pejović, Otpornost materijala, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2015.
3. V. Brčić, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
4. V. Lubarda, Otpornost materijala, Univerzitet „Veljko Vlahović“ u Titogradu, Titograd, 1989.